

[問題] (広報用の問題)

xyz -座標空間内の原点を中心とする半径1の球面のパラメータ表示

$$\begin{cases} x = \sin u \cos v \\ y = \sin u \sin v \\ z = \cos u \end{cases}$$

を考える.

問題 1. 次の行列 J を計算せよ.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

問題 2. $u = v = \frac{\pi}{2}$ のとき, 座標空間における点 $(0, 1, 0)$ を始点とするベクトル

$$\mathbf{w}_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad \mathbf{w}_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

を, 原点中心, 半径1の球面と一緒に図示せよ. (概形でよい.)

問題 3. $0 < u \leq \frac{\pi}{2}, 0 < v < \pi$ において, 常に行列 J の階数は2であることを示せ.

問題 4. 問題 3 のことから, ベクトル

$$\mathbf{w}_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad \mathbf{w}_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

について, どんなことがわかるか. また, そのことは球面に対してどのようなことを意味するのか.